

Versuch einer Theorie der β -Strahlen. I¹⁾.

Von E. Fermi in Rom.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Januar 1934.)

Eine quantitative Theorie des β -Zerfalls wird vorgeschlagen, in welcher man die Existenz des Neutrinos annimmt, und die Emission der Elektronen und Neutrinos aus einem Kern beim β -Zerfall mit einer ähnlichen Methode behandelt, wie die Emission eines Lichtquants aus einem angeregten Atom in der Strahlungstheorie. Formeln für die Lebensdauer und für die Form des emittierten kontinuierlichen β -Strahlenspektrums werden abgeleitet und mit der Erfahrung verglichen.

1. Grundannahmen der Theorie.

Bei dem Versuch, eine Theorie der Kernelektronen sowie der β -Emission aufzubauen, begegnet man bekanntlich zwei Schwierigkeiten. Die erste ist durch das kontinuierliche β -Strahlenspektrum bedingt. Falls der Erhaltungssatz der Energie gültig bleiben soll, muß man annehmen, daß ein Bruchteil der beim β -Zerfall frei werdenden Energie unseren bisherigen Beobachtungsmöglichkeiten entgeht. Nach dem Vorschlag von W. Pauli kann man z. B. annehmen, daß beim β -Zerfall nicht nur ein Elektron, sondern auch ein neues Teilchen, das sogenannte „Neutrino“ (Masse von der Größenordnung oder kleiner als die Elektronenmasse; keine elektrische Ladung) emittiert wird. In der vorliegenden Theorie werden wir die Hypothese des Neutrinos zugrunde legen.

Eine weitere Schwierigkeit für die Theorie der Kernelektronen besteht darin, daß die jetzigen relativistischen Theorien der leichten Teilchen (Elektronen oder Neutrinos) nicht imstande sind, in einwandfreier Weise zu erklären, wie solche Teilchen in Bahnen von Kerndimensionen gebunden werden können.

Es scheint deswegen zweckmäßiger, mit Heisenberg²⁾ anzunehmen, daß ein Kern nur aus schweren Teilchen, Protonen und Neutronen, besteht. Um trotzdem die Möglichkeit der β -Emission zu verstehen, wollen wir versuchen, eine Theorie der Emission leichter Teilchen aus einem Kern in Analogie zur Theorie der Emission eines Lichtquants aus einem angeregten Atom beim gewöhnlichen Strahlungsprozeß aufzubauen. In der Strahlungstheorie ist die totale Anzahl der Lichtquanten keine Konstante: Lichtquanten entstehen, wenn sie von einem Atom emittiert werden, und verschwinden, wenn sie absorbiert werden. In Analogie hierzu wollen wir der β -Strahlentheorie folgende Annahmen zugrunde legen:

¹⁾ Vgl. die vorläufige Mitteilung: La Ricerca Scientifica 2, Heft 12, 1933. —

²⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 77, 1, 1932.

a) Die totale Anzahl der Elektronen, sowie der Neutrinos, ist nicht notwendigerweise konstant. Elektronen (oder Neutrinos) können entstehen und verschwinden. Diese Möglichkeit hat jedoch keine Analogie zum Entstehen oder Verschwinden eines Paares aus einem Elektron und einem Positron; falls man das Positron als Diracsches „Loch“ interpretiert, kann man in der Tat diesen letzten Prozeß einfach als einen Quantensprung eines Elektrons zwischen einem Zustand mit negativer Energie und einem Zustand mit positiver Energie mit Erhaltung der totalen (unendlich großen) Anzahl der Elektronen auffassen.

b) Die schweren Teilchen, Neutronen und Protonen, können wie bei Heisenberg als zwei innere Quantenzustände des schweren Teilchens betrachtet werden. Wir formulieren dies durch die Einführung einer inneren Koordinate ϱ des schweren Teilchens, welche nur zwei Werte annehmen kann: $\varrho = 1$, falls das Teilchen ein Neutron ist; $\varrho = -1$, falls das Teilchen ein Proton ist.

c) Die Hamilton-Funktion des aus schweren und leichten Teilchen bestehenden Systems muß so gewählt werden, daß jedem Übergang von Neutron zu Proton das Entstehen eines Elektrons und eines Neutrinos zugeordnet ist. Dem umgekehrten Prozeß, Verwandlung eines Protons in ein Neutron, soll dagegen das Verschwinden eines Elektrons und eines Neutrinos zugeordnet sein. Man bemerke, daß hierdurch die Erhaltung der Ladung gesichert ist.

2. Die in der Theorie auftretenden Operatoren.

Ein mathematischer Formalismus der Theorie in Einklang mit diesen drei Forderungen kann am leichtesten mit Hilfe der Dirac-Jordan-Kleinschen Methode¹⁾ der „zweiten Quantelung“ aufgebaut werden. Wir werden also die Wahrscheinlichkeitsamplituden ψ und φ der Elektronen und der Neutrinos sowie die komplex konjugierten Größen ψ^* und φ^* als Operatoren auffassen; für die Beschreibung der schweren Teilchen werden wir dagegen die übliche Darstellung im Konfigurationsraum benutzen, wobei natürlich auch ϱ als Koordinate mitgezählt werden muß.

Wir führen zuerst zwei Operatoren Q und Q^* ein, welche auf die Funktionen der zweiwertigen Variablen ϱ als die linearen Substitutionen

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

¹⁾ Vgl. z. B. P. Jordan u. O. Klein, ZS. f. Phys. **45**, 751, 1927; W. Heisenberg, Ann. d. Phys. **10**, 888, 1931.

wirken. Man sieht ohne weiteres, daß Q einem Übergang von Proton zu Neutron entspricht und Q^* einem Übergang von Neutron zu Proton.

Die Bedeutung der als Operatoren aufgefaßten Wahrscheinlichkeitsamplituden ψ und φ ist bekanntlich die folgende: Sei

$$\psi_1 \psi_2 \dots \psi_s \dots$$

ein System individueller Quantenzustände für die Elektronen. Man setze weiter

$$\psi = \sum_s \psi_s a_s; \quad \psi^* = \sum_s \psi_s^* a_s^*. \quad (2)$$

Die Amplituden a_s und die komplex konjugierten Größen a_s^* sind Operatoren, welche auf die Funktionen der Besetzungszahlen $N_1, N_2, \dots, N_s, \dots$ der individuellen Quantenzustände wirken. Im Falle des Pauli-Prinzips ist jedes der N_s nur der beiden Werte 0 und 1 fähig. Die Operatoren a_s und a_s^* sind dann folgendermaßen definiert:

$$\left. \begin{aligned} a_s \Psi(N_1 N_2 \dots N_s \dots) &= (-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_s - 1} (1 - N_s) \Psi(N_1 N_2 \dots 1 - N_s \dots) \\ a_s^* \Psi(N_1 N_2 \dots N_s \dots) &= (-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_s - 1} N_s \Psi(N_1 N_2 \dots 1 - N_s \dots) \end{aligned} \right\} (3)$$

Der Operator a_s^* entspricht der Erzeugung und der Operator a_s dem Verschwinden eines Elektrons im Quantenzustand s .

Entsprechend zu (2) setze man für die Neutrinos

$$\varphi = \sum_\sigma \varphi_\sigma b_\sigma \quad \varphi^* = \sum_\sigma \varphi_\sigma^* b_\sigma^*. \quad (4)$$

Die komplex-konjugierten Größen b_σ und b_σ^* sind Operatoren, die auf die Funktionen der Besetzungszahlen $M_1, M_2, \dots, M_\sigma, \dots$ der individuellen Quantenzustände $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\sigma, \dots$ der Neutrinos wirken. Nimmt man an, daß auch für die Neutrinos das Pauli-Prinzip gilt, so sind die Zahlen M_σ nur der beiden Werte 0 und 1 fähig. Es ist ferner:

$$\left. \begin{aligned} b_\sigma \Phi(M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots) &= (-1)^{M_1 + M_2 + \dots + M_\sigma - 1} (1 - M_\sigma) \Phi(M_1 M_2 \dots 1 - M_\sigma \dots) \\ b_\sigma^* \Phi(M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots) &= (-1)^{M_1 + M_2 + \dots + M_\sigma - 1} M_\sigma \Phi(M_1 M_2 \dots 1 - M_\sigma \dots) \end{aligned} \right\} (5)$$

Die Operatoren b_σ und b_σ^* entsprechen dem Verschwinden bzw. dem Entstehen eines Neutrinos im Quantenzustand σ .

3. Aufstellung der Hamilton-Funktion.

Die Energie des gesamten, aus schweren und leichten Teilchen bestehenden, Systems ist die Summe der Energien H_{schwer} der schweren Teilchen + H_{leicht} der leichten Teilchen + der Wechselwirkungsenergie H zwischen schweren und leichten Teilchen.

Das erste Glied schreiben wir, indem wir vorläufig nur ein einziges schweres Teilchen betrachten, in der Form

$$H_{\text{schwer}} = \frac{1 + \varrho}{2} N + \frac{1 - \varrho}{2} P, \quad (6)$$

wo N und P die Energieoperatoren des Neutrons bzw. des Protons darstellen. Für $\varrho = 1$ (Neutron) reduziert sich in der Tat (6) auf N ; für $\varrho = -1$ (Proton) reduziert sich (6) auf P .

Die Energie H_{leicht} der leichten Teilchen nimmt die einfachste Form an, wenn man als Quantenzustände $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_s \dots$ und $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_\sigma \dots$ stationäre Zustände für die Elektronen bzw. die Neutrinos nimmt. Für die Elektronen soll man dabei etwa die stationären Zustände im Coulomb-Feld des Kerns, unter Berücksichtigung der Elektronenabschirmung, wählen. Für die Neutrinos kann man einfach ebene de Broglie-Wellen annehmen, da wohl die auf die Neutrinos wirkenden Kräfte keine wesentliche Rolle spielen. Seien $H_1 H_2 \dots H_s \dots$ und $K_1 K_2 \dots K_\sigma \dots$ die Energien der stationären Zustände der Elektronen und der Neutrinos; dann haben wir:

$$H_{\text{leicht}} = \sum_s H_s N_s + \sum_\sigma K_\sigma M_\sigma. \quad (7)$$

Es bleibt nur noch die Wechselwirkungsenergie zu schreiben. Diese besteht erstens aus der Coulomb-Energie zwischen Proton und Elektronen; bei schweren Kernen spielt jedoch die Anziehung durch ein einziges Proton nur eine untergeordnete Rolle¹⁾ und trägt in keinem Falle zum Prozeß des β -Zerfalls bei. Wir wollen also dies Glied der Einfachheit halber nicht berücksichtigen. Wir müssen hingegen zur Hamilton-Funktion ein Glied addieren, das die Bedingung c) von Ziffer 1 erfüllt.

Ein Glied, das notwendigerweise die Verwandlung eines Protons in ein Neutron mit dem Verschwinden eines Elektrons und eines Neutrinos koppelt, hat nun nach Ziffer 2 die Form

$$Q a_s b_\sigma. \quad (8)$$

Der komplex konjugierte Operator

$$Q^* a_s^* b_\sigma^* \quad (8')$$

koppelt dagegen die umgekehrten Prozesse (Verwandlung eines Neutrons in ein Proton und Entstehen eines Elektrons und eines Neutrinos).

Ein Wechselwirkungsglied, das die Bedingung c) erfüllt, kann also in der folgenden Form geschrieben werden:

$$H = Q \sum_{s\sigma} c_{s\sigma} a_s b_\sigma + Q^* \sum_{s\sigma} c_{s\sigma}^* a_s^* b_\sigma^*, \quad (9)$$

¹⁾ Die Coulombsche Wirkung der zahlreichen übrigen Protonen muß natürlich als statisches Feld in Betracht gezogen werden.

wo $c_{s\sigma}$ und $c_{s\sigma}^*$ Größen darstellen, die von den Koordinaten, Impulsen usw. des schweren Teilchens abhängen können.

Zur näheren Bestimmung von H ist man auf Einfachheitskriterien angewiesen. Eine wesentliche Einschränkung in der Freiheit der Wahl von H ist durch die Erhaltung des Impulses sowie durch die Bedingung gesetzt, daß bei einer Drehung oder einer Translation der Raumkoordinaten (9) invariant bleiben muß.

Sehen wir zunächst von den Relativitätskorrekturen und der Spinwirkung ab, so ist wohl die eintachst mögliche Wahl von (9) die folgende:

$$H = g \{ Q \psi(x) \varphi(x) + Q^* \psi^*(x) \varphi^*(x) \}, \quad (10)$$

wo g eine Konstante mit den Dimensionen $L^5 M T^{-2}$ darstellt; x repräsentiert die Koordinaten des schweren Teilchens; $\psi, \varphi, \psi^*, \varphi^*$ sind durch (2) und (4) gegeben und sind an dem Orte x, y, z des schweren Teilchens zu nehmen.

(10) stellt keineswegs die einzig mögliche Wahl von H dar. Jeder skalare Ausdruck, wie etwa

$$L(p) \psi(x) M(p) \varphi(x) N(p) + \text{kompl. konjug.},$$

wo $L(p), M(p), N(p)$ passende Funktionen des Impulses des schweren Teilchens darstellen, würde ebensogut möglich sein. Da jedoch die Folgerungen aus (10) bisher mit der Erfahrung in Einklang zu sein scheinen, ist es wohl besser, sich vorläufig auf die einfachste Wahl zu beschränken.

Wesentlich ist es jedoch, den Ausdruck (10) derart zu verallgemeinern, daß man mindestens die leichten Teilchen relativistisch behandeln kann. Auch bei dieser Verallgemeinerung ist natürlich eine gewisse Willkür nicht auszuschließen. Die einfachste Lösung des Problems dürfte die folgende sein:

Relativistisch treten an Stelle von ψ und φ je vier Diracsche Funktionen $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$ und $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$. Wir betrachten nun die 16 unabhängigen bilinearen Kombinationen aus $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$ und $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$. Bei einer Lorentz-Transformation der Koordinaten erfahren diese 16 Größen eine lineare Transformation, eine Darstellung der Ordnung 16 der Lorentz-Gruppe. Diese Darstellung spaltet sich in verschiedene einfachere Darstellungen; im besonderen transformieren sich die vier bilinearen Kombinationen:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1 + \psi_3 \varphi_4 - \psi_4 \varphi_3, \\ A_1 &= \psi_1 \varphi_3 - \psi_2 \varphi_4 - \psi_3 \varphi_1 + \psi_4 \varphi_2, \\ A_2 &= i \psi_1 \varphi_3 + i \psi_2 \varphi_4 - i \psi_3 \varphi_1 - i \psi_4 \varphi_2, \\ A_3 &= -\psi_1 \varphi_4 - \psi_2 \varphi_3 + \psi_3 \varphi_2 + \psi_4 \varphi_1, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wie die Komponenten eines polaren Vierervektors, also wie die Komponenten des elektromagnetischen Viererpotentials. Es liegt nun nahe, die Größen

$$g(QA_i + Q^*A_i^*)$$

in der Hamilton-Funktion des schweren Teilchens in einer Stellung aufzunehmen, die der Stellung der Komponenten des Viererpotentials entspricht.

Hier begegnen wir einer Schwierigkeit, welche davon herrührt, daß die relativistische Wellengleichung für die schweren Teilchen unbekannt ist. Falls die Geschwindigkeit des schweren Teilchens klein gegenüber c ist, kann man sich jedoch auf den zu eV ($V =$ skalares Potential) analogen Term beschränken und schreiben:

$$H = g[Q(-\psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1 + \psi_3\varphi_4 - \psi_4\varphi_3) + Q^*(-\psi_1^*\varphi_2^* + \psi_2^*\varphi_1^* + \psi_3^*\varphi_4^* - \psi_4^*\varphi_3^*)]. \quad (12)$$

Zu diesem Glied sollen noch andere Glieder von der Größenordnung v/c addiert werden. Da die Geschwindigkeiten der Neutronen und Protonen in den Kernen gewöhnlich klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, wollen wir diese Glieder vorläufig vernachlässigen (vgl. hierzu Ziffer 9).

(12) kann in symbolischer Schreibweise folgendermaßen abgekürzt werden:

$$H = g[Q\tilde{\psi}^*\delta\varphi + Q^*\tilde{\varphi}\delta\varphi^*], \quad (13)$$

wo ψ und φ als vertikale Matrixspalten zu schreiben sind; das Zeichen \sim verwandelt eine Matrix in die konjugiert transponierte; und es ist

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Mit diesen Bezeichnungen bekommt man durch Vergleich mit (9)

$$c_{s\sigma} = g\tilde{\psi}_s^*\delta\varphi_\sigma; \quad c_{s\sigma}^* = g\tilde{\varphi}_s\delta\varphi_\sigma^*, \quad (15)$$

wo ψ_s und φ_s die normierten vierkomponentigen Eigenfunktionen der Zustände s (des Elektrons) und σ (des Neutrinos) darstellen. ψ und φ sind in (15) an der Stelle des schweren Teilchens, also als Funktionen von x, y, z , zu nehmen.

4. Die Störungsmatrix.

Die Theorie des β -Zerfalls kann mit Hilfe der aufgestellten Hamilton-Funktion in voller Analogie zur Strahlungstheorie durchgeführt werden. In dieser letzteren besteht die Hamilton-Funktion bekanntlich aus der

Summe: Energie des Atoms + Energie des reinen Strahlungsfeldes + Koppelungsenergie. Dies letzte Glied wird als Störung der beiden anderen aufgefaßt. In Analogie hierzu werden wir in unserem Falle die Summe

$$H_{\text{schwer}} + H_{\text{leicht}} \quad (16)$$

als ungestörte Hamilton-Funktion betrachten; hinzu kommt die durch das Kopplungsglied (13) dargestellte Störung.

Die Quantenzustände des ungestörten Systems können folgendermaßen numeriert werden:

$$(\varrho, n, N_1 N_2 \dots N_s \dots M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots), \quad (17)$$

wo die erste Zahl ϱ einen der beiden Werte ± 1 annimmt und angibt, ob das schwere Teilchen ein Neutron oder ein Proton ist. Die zweite Zahl n numeriert den Quantenzustand des Neutrons oder des Protons. Für $\varrho = 1$ (Neutron) sei die entsprechende Eigenfunktion

$$u_n(x), \quad (18)$$

wo x die Koordinaten des schweren Teilchens, bis auf ϱ , darstellt. Für $\varrho = -1$ (Proton) sei die Eigenfunktion

$$v_n(x). \quad (19)$$

Die übrigen Zahlen $N_1 N_2 \dots N_s \dots M_1 M_2 \dots M_\sigma \dots$ sind nur der beiden Werte 0 und 1 fähig und geben an, ob der betreffende Zustand des Elektrons oder des Neutrinos besetzt ist.

Faßt man nun die allgemeine Form (9) der Störungsenergie ins Auge, so sieht man, daß sie von Null verschiedene Elemente nur für solche Übergänge hat, bei denen entweder das schwere Teilchen von einem Neutron in einen Protonenzustand übergeht und zugleich ein Elektron und ein Neutrino entstehen, oder umgekehrt.

Mit Hilfe von (1), (3), (5), (9), (18), (19) findet man ohne weiteres das betreffende Matrixelement

$$H_{-1}^{1n N_1 N_2 \dots O_s \dots M_1 M_2 \dots O_\sigma \dots} = \pm \int v_m^* c_{s\sigma}^* u_n d\tau, \quad (20)$$

wo die Integration über den Konfigurationsraum des schweren Teilchens (bis auf die Koordinate ϱ) erstreckt werden muß. Das \pm -Zeichen bedeutet genauer

$$(-1)^{N_1 + N_2 + \dots + N_{s-1} + M_1 + M_2 + \dots + M_{\sigma-1}}$$

und wird übrigens aus den folgenden Rechnungen herausfallen. Dem entgegengesetzten Übergang entspricht ein komplex konjugiertes Matrixelement.

Führt man für $c_{s\sigma}^*$ den Wert (15) ein, so erhält man

$$H_{-1 m 1_s 1_\sigma}^{1 n 0_s 0_\sigma} = \pm g \int v_m^* u_n \tilde{\psi}_s \delta \varphi_\sigma^* d\tau, \quad (21)$$

wo der Kürze wegen im ersten Glied alle gleichbleibenden Indizes fortgelassen worden sind.

5. Theorie des β -Zerfalls.

Ein β -Zerfall besteht in einem Prozeß, bei welchem ein Kernneutron sich in ein Proton verwandelt und gleichzeitig mit dem geschilderten Mechanismus ein Elektron, das als β -Strahl beobachtet wird und ein Neutrino emittiert werden. Um die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses zu berechnen, wollen wir annehmen, daß zur Zeit $t = 0$ ein Neutron in einem Kernzustand mit Eigenfunktion $u_n(x)$ vorhanden ist und $N_s = M_\sigma = 0$, d. h. der Elektronenzustand s und der Neutrinozustand σ leer sind. Dann ist für $t = 0$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Zustands $(1, n, 0_s, 0_\sigma)$

$$a_{1 n 0_s 0_\sigma} = 1 \quad (22)$$

und die des Zustandes $(-1, m, 1_s, 1_\sigma)$, wo das Neutron in ein Proton mit der Eigenfunktion $v_m(x)$ unter Emission eines Elektrons und eines Neutrinos übergegangen ist, gleich Null.

Mit Anwendung der gewöhnlichen Störungsformeln hat man nun für eine Zeit, die kurz genug ist, damit (22) noch angenähert gültig ist:

$$\dot{a}_{-1 m 1_s 1_\sigma} = -\frac{2\pi i}{\hbar} H_{-1 m 1_s 1_\sigma}^{1 n 0_s 0_\sigma} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(-W + H_s + K_\sigma)t}, \quad (23)$$

wo W die Energiedifferenz des Neutronen- und des Protonenzustandes darstellt.

Aus (23) erhält man (da für $t = 0$, $a_{-1 m 1_s 1_\sigma} = 0$)

$$a_{-1 m 1_s 1_\sigma} = -H_{-1 m 1_s 1_\sigma}^{1 n 0_s 0_\sigma} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(-W + H_s + K_\sigma)t} - 1}{-W + H_s + K_\sigma}. \quad (24)$$

Die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Übergangs ist also zur Zeit t

$$|a_{-1 m 1_s 1_\sigma}|^2 = 4 \left| H_{-1 m 1_s 1_\sigma}^{1 n 0_s 0_\sigma} \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi t}{\hbar} (-W + H_s + K_\sigma)}{(-W + H_s + K_\sigma)^2}. \quad (25)$$

Um die Lebensdauer des Neutronenzustands u_n zu berechnen, hat man den Ausdruck (25) über alle freien Elektronen- und Neutrinozustände zu summieren.

Eine wesentliche Vereinfachung in der Ausführung der Summe erhält man durch die Bemerkung, daß die de Broglie-Wellenlänge für Elektronen und Neutrinos mit Energien von einigen Millionen Volt wesentlich größer ist als die Kerndimensionen. In erster Näherung kann man also die Eigenfunktionen ψ_s und φ_σ innerhalb des Kerns als Konstante betrachten. (21) wird dann:

$$H_{-1 m 1_s 1_\sigma}^{1 n 0_s 0_\sigma} = \pm g \tilde{\psi}_s \delta \varphi_\sigma^* \int v_m^* u_n d\tau, \quad (26)$$

wobei hier und im folgenden ψ_s und φ_σ an der Stelle des Kerns zu nehmen sind (vgl. Ziffer 8). Aus (26) hat man

$$\left| H_{-1 m 1_s 1_\sigma}^{1 n 0_s 0_\sigma} \right|^2 = g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \tilde{\psi}_s \delta \varphi_\sigma^* \tilde{\varphi}_\sigma^* \tilde{\delta} \psi_s. \quad (27)$$

Die Zustände σ des Neutrinos sind durch ihren Impuls p_σ und die Spinrichtung bestimmt. Falls wir zu Normierungszwecken in einem Volumen Ω quantisieren, dessen Dimensionen wir nachher ins Unendliche wachsen lassen werden, so sind die normierten Neutrinoeigenfunktionen ebene Dirac-Wellen, mit der Dichte $1/\Omega$. Eine einfache Algebra erlaubt dann in (27) den Mittelwert über alle Richtungen von p_σ und alle Spinrichtungen des Neutrinos zu nehmen. (Zu betrachten sind dabei nur die positiven Eigenwerte; die negativen sind mit einem der Diracschen Löchertheorie analogen Kunstgriff zu beseitigen.) Man findet:

$$\left| H_{-1 m 1_s 1_\sigma}^{1 n 0_s 0_\sigma} \right|^2 = \frac{g^2}{4\Omega} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \left(\tilde{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \tilde{\psi}_s \beta \psi_s \right), \quad (28)$$

wo μ die Ruhemasse des Neutrinos und β die Diracsche Matrix

$$\beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (29)$$

darstellt. Beachtet man nun:

daß die Anzahl der Neutrinozustände positiver Energie mit Impuls zwischen p_σ und $p_\sigma + dp_\sigma$ $\frac{8\pi\Omega}{h^3} p_\sigma^2 dp_\sigma$ ist;

daß $\frac{\partial K_\sigma}{\partial p_\sigma} = v_\sigma$, wo v_σ die Geschwindigkeit des Neutrinos im Zustand σ darstellt;

daß (25) ein scharfes Maximum in der Nähe des Wertes von p_σ hat, für den die Variation der ungestörten Energie verschwindet, d. h.

$$-W + H_s + K_\sigma = 0, \quad (30)$$

so kann man die Summe von (25) über σ in bekannter Weise¹⁾ ausführen, und man findet:

$$t \cdot \frac{8 \pi^3 g^2}{h^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left(\tilde{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \tilde{\psi}_s \beta \psi_s \right), \quad (31)$$

wo p_σ hier den Wert des Neutrinoimpulses bedeutet, für den (30) gültig ist.

6. Bestimmungsstücke der Übergangswahrscheinlichkeit.

(31) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß während der Zeit t ein β -Zerfall mit Übergang des Elektrons in den Zustand s stattfindet. Wie es sein soll, ist diese Wahrscheinlichkeit proportional der Zeit t (t ist als klein in bezug auf die Lebensdauer angenommen worden); der Koeffizient von t gibt die Übergangswahrscheinlichkeit für den geschilderten Prozeß an. Sie ist:

$$P_s = \frac{8 \pi^3 g^2}{h^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} \left(\tilde{\psi}_s \psi_s - \frac{\mu c^2}{K_\sigma} \tilde{\psi}_s \beta \psi_s \right). \quad (32)$$

Man bemerke:

a) Für die freien Neutrinozustände ist immer $K_\sigma > \mu c^2$. Damit (30) befriedigt werden kann, ist also notwendig, daß

$$H_s \leq W - \mu c^2. \quad (33)$$

Dem =-Zeichen entspricht die obere Grenze des kontinuierlichen β -Strahlungsspektrums.

b) Da für die freien Elektronenzustände $H_s > m c^2$ ist, bekommt man die folgende, für die Möglichkeit des β -Zerfalls notwendige Bedingung

$$W \geq (m + \mu) c^2. \quad (34)$$

Ein besetzter Neutronenzustand n im Kerne muß also hoch genug über einem unbesetzten Protonenzustand m liegen, damit der β -Prozeß vor sich gehen kann.

c) Nach (32) hängt P_s von den Eigenfunktionen u_n , v_m des schweren Teilchens im Kerne durch das Matrixelement

$$Q_{m n}^* = \int v_m^* u_n d\tau \quad (35)$$

ab. Dies Matrixelement spielt in der β -Strahltheorie eine ähnliche Rolle wie das Matrixelement des elektrischen Moments eines Atoms in der Strahlungstheorie. Das Matrixelement (35) hat normalerweise die Größenordnung 1; durch besondere Symmetrieeigenschaften von u_n und v_m kann es jedoch oft vorkommen, daß $Q_{m n}^*$ verschwindet. In solchen Fällen sprechen

¹⁾ Für die genaue Beschreibung der Methode, solche Summen auszuführen, vgl. irgendeinen Aufsatz über Strahlungstheorie; etwa: E. Fermi, Rev. Mod. Phys. 4, 87, 1932.

wir von *verbotenen β -Übergängen*. Man muß natürlich nicht erwarten, daß die verbotenen Übergänge überhaupt nicht vorkommen, da (32) nur eine Näherungsformel ist. Wir werden in Ziffer 9 etwas über diesen Typ von Übergängen sprechen.

7. Die Masse des Neutrinos.

Durch die Übergangswahrscheinlichkeit (32) ist die Form des kontinuierlichen β -Spektrums bestimmt. Wir wollen zuerst diskutieren, wie diese Form von der Ruhemasse μ des Neutrinos abhängt, um von einem Vergleich mit den empirischen Kurven diese Konstante zu bestimmen. Die Masse μ ist in dem Faktor p_σ^2/v_σ enthalten. Die Abhängigkeit der Form der Energieverteilungskurve von μ ist am meisten ausgeprägt in der Nähe des Endpunktes

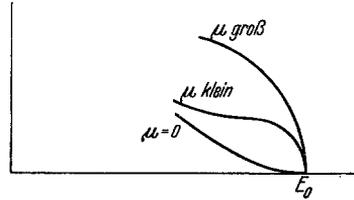


Fig. 1.

der Verteilungskurve. Ist E_0 die Grenzenergie der β -Strahlen, so sieht man ohne Schwierigkeit, daß die Verteilungskurve für Energien E in der Nähe von E_0 bis auf einen von E unabhängigen Faktor sich wie

$$\frac{p_\sigma^2}{v_\sigma} = \frac{1}{c^3} (\mu c^2 + E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 + 2\mu c^2 (E_0 - E)} \quad (36)$$

verhält.

In der Fig. 1 ist das Ende der Verteilungskurve für $\mu = 0$ und für einen kleinen und einen großen Wert von μ gezeichnet. Die größte Ähnlichkeit mit den empirischen Kurven zeigt die theoretische Kurve für $\mu = 0$.

Wir kommen also zu dem Schluß, daß die Ruhemasse des Neutrinos entweder Null oder jedenfalls sehr klein in bezug auf die Masse des Elektrons ist¹⁾. In den folgenden Rechnungen werden wir die einfachste Hypothese $\mu = 0$ einführen. Es wird dann (30)

$$v_\sigma = c; \quad K_\sigma = p_\sigma c; \quad p_\sigma = \frac{K_\sigma}{c} = \frac{W - H_s}{c} \quad (37)$$

Die Ungleichungen (33), (34) werden jetzt:

$$H_s \leq W; \quad W \geq m c^2. \quad (38)$$

Und die Übergangswahrscheinlichkeit (32) nimmt die Form an:

$$P_s = \frac{8 \pi^3 g^2}{c^3 h^4} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \tilde{\psi}_s \psi_s (W - H_s)^2. \quad (39)$$

¹⁾ In einer kürzlich erschienenen Notiz kommt F. Perrin, C. R. **197**, 1625, 1933, mit qualitativen Überlegungen zu demselben Schluß.

8. Lebensdauer und Form der Verteilungskurve für „erlaubte“ Übergänge.

Aus (39) kann man eine Formel ableiten, welche angibt, wieviel β -Übergänge in der Zeiteinheit stattfinden, für welche das β -Teilchen einen Impuls zwischen $mc\eta$ und $mc(\eta + d\eta)$ erhält. Dazu muß man eine Formel für die Summe von $\tilde{\psi}_s \psi_s$ am Orte des Kerns über alle im kontinuierlichen Spektrum liegenden Quantenzustände des betreffenden Intervalls ableiten.

Dabei sei bemerkt, daß die relativistischen Eigenfunktionen im Coulomb-Feld für die Zustände mit $j = 1/2$ (${}^2s_{1/2}$ und ${}^2p_{1/2}$) für $r = 0$ unendlich groß werden. Nun gehorcht aber die Kernanziehung für die Elektronen dem Coulombschen Gesetz nur bis $r > \rho$, wo ρ hier den Kernradius bedeutet. Eine Übersichtsrechnung zeigt, daß, wenn man plausible Annahmen über den Verlauf des elektrischen Feldes innerhalb des Kerns macht, der Wert von $\tilde{\psi}_s \psi_s$ im Mittelpunkt einen Wert hat, der sehr nahe dem Werte liegt, den $\tilde{\psi}_s \psi_s$ im Falle des Coulomb-Gesetzes in der Entfernung ρ vom Mittelpunkt annehmen würde.

Durch Heranziehung der bekannten Formeln¹⁾ für die relativistischen Eigenfunktionen des Kontinuums im wasserstoffähnlichen Falle findet man also nach einer ziemlich langwierigen Rechnung

$$\sum_{\alpha\eta} \tilde{\psi}_s \psi_s = d\eta \cdot \frac{32 \pi m^3 c^3}{h^3 [\Gamma(3+2S)]^2} \left(\frac{4\pi m c \rho}{h} \right)^{2S} \eta^{2+2S} e^{\pi\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma\left(1+S+i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\right) \right|^2, \quad (40)$$

wo

$$\gamma = Z/137; \quad S = \sqrt{1-\gamma^2} - 1. \quad (41)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit in einen Elektronenzustand mit einem Impuls des Intervalls $mc d\eta$ wird dann nach (39):

$$P(\eta) d\eta = d\eta \cdot g^2 \frac{256 \pi^4}{[\Gamma(3+2S)]^2} \frac{m^5 c^4}{h^7} \left(\frac{4\pi m c \rho}{h} \right)^{2S} \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 \cdot \eta^{2+2S} e^{\pi\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma\left(1+S+i\gamma \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\right) \right|^2 (\sqrt{1+\eta_0^2} - \sqrt{1+\eta^2})^2, \quad (42)$$

wo η_0 den in Einheiten mc gemessenen maximalen Impuls der emittierten β -Strahlen darstellt.

Die numerische Auswertung von (42) kann man etwa für $\gamma = 0,6$, d. h. $Z = 82,2$ machen, da ja die Atomnummern der radioaktiven Stoffe nicht weit von diesem Wert liegen. Für $\gamma = 0,6$ ist nach (41) $S = -0,2$. Man findet weiter, daß für $\eta < 10$ die folgende Formel angenähert gilt:

$$\eta^{1,6} e^{0,6\pi \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}} \left| \Gamma\left(0,8 + 0,6i \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\right) \right|^2 \simeq 4,5 \eta + 1,6 \eta^2. \quad (43)$$

¹⁾ R. H. Hulme, Proc. Roy. Soc. London (A) **133**, 381, 1931.

Formel (42) wird damit, wenn man $\varrho = 9 \cdot 10^{-13}$ setzt:

$$P(\eta) d\eta = 1,75 \cdot 10^{95} g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 (\eta + 0,355 \eta^2) (\sqrt{1 + \eta_0^2} - \sqrt{1 + \eta^2})^2. \quad (44)$$

Die reziproke Lebensdauer erhält man aus (44) durch Integration von $\eta = 0$ bis $\eta = \eta_0$; man findet:

$$\frac{1}{\tau} = 1,75 \cdot 10^{95} g^2 \left| \int v_m^* u_n d\tau \right|^2 F(\eta_0), \quad (45)$$

wo

$$F(\eta_0) = \frac{2}{3} (\sqrt{1 + \eta_0^2} - 1) + \frac{\eta_0^4}{12} - \frac{\eta_0^2}{3} + 0,355 \left[-\frac{\eta_0}{4} - \frac{\eta_0^3}{12} + \frac{\eta_0^5}{30} + \frac{\sqrt{1 + \eta_0^2}}{4} \log(\eta_0 + \sqrt{1 + \eta_0^2}) \right]. \quad (46)$$

Für kleine Argumente verhält sich $F(\eta_0)$ wie $\eta_0^6/24$; für größere Argumente sind die Werte von F in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 1.

η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$	η_0	$F(\eta_0)$
0	$\eta_0^6/24$	2	1,2	4	29	6	185
1	0,03	3	7,5	5	80	7	380

9. Die verbotenen Übergänge.

Bevor wir zum Vergleich mit der Erfahrung übergehen, wollen wir noch einige Eigenschaften der verbotenen β -Übergänge diskutieren.

Wie schon bemerkt, ist ein Übergang verboten, wenn das zugehörige Matricelement (35) verschwindet. Falls nun die Darstellung des Kerns mit individuellen Quantenzuständen der Neutronen und der Protonen eine gute Näherung ist, verschwindet immer $Q_{m'n}^*$ aus Symmetriegründen, wenn nicht

$$i = i', \quad (47)$$

wo i und i' die Impulsmomente (in Einheiten $\hbar/2\pi$) des Neutronenzustands u_n und des Protonenzustands v_m darstellen. Der Auswahlregel (47) entspricht, falls die individuellen Zustände keine gute Näherung sind, die allgemeinere

$$I = I', \quad (48)$$

wo I und I' die Impulsmomente des Kerns vor und nach dem β -Zerfall bedeuten.

Die Auswahlregeln (47) und (48) sind bei weitem nicht so scharf wie die Auswahlregeln der Optik. Es gibt hauptsächlich zwei Prozesse, wodurch ein Durchbrechen dieser Auswahlregeln möglich ist:

a) Formel (26) ist durch Vernachlässigung der Variationen von ψ_s und φ_σ innerhalb der Kernaussdehnung erhalten worden. Falls man aber ψ_s und φ_σ im Bereich des Kerns nicht als Konstante betrachtet, so erhält man die Möglichkeit von β -Übergängen auch in Fällen, wo Q_{mn}^* verschwindet.

Es ist leicht einzusehen, daß die Intensität solcher Übergänge zur Intensität der erlaubten Prozesse größenordnungsmäßig im Verhältnis $(\rho/\lambda)^2$ steht, wo λ die de Broglie-Wellenlänge der leichten Teilchen dargestellt. Man bemerke hierzu, daß, bei gleicher Energie, die kinetische Energie der Elektronen am Orte des Kerns wegen der elektrostatischen Anziehung erheblich größer ist als die der Neutrinos; die größte Wirkung rührt also von der Variation von ψ_s her. Eine Abschätzung der Intensität dieser verbotenen Prozesse zeigt, daß sie rund 100mal schwächer sein müssen als die nach (48) erlaubten Übergänge, für welche β -Teilchen der gleichen Energie emittiert werden.

Ein Merkmal für verbotene Übergänge dieses Typs könnte man nicht nur in der verhältnismäßig längeren Lebensdauer, sondern auch in der verschiedenen Form der Energieverteilungskurve der β -Strahlen erblicken; man findet nämlich, daß für diese Übergänge die Verteilungskurve für kleine Energien tiefer liegen muß als im normalen Falle.

b) Eine zweite Möglichkeit von nach (48) verbotenen Übergängen folgt aus der am Ende von Ziffer 3 bemerkten Tatsache, daß, falls man die Geschwindigkeit der schweren Kernbestandteile nicht gegen die Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt, zum Wechselwirkungsglied (12) noch weitere von der Größenordnung v/c hinzutreten. Falls man etwa auch für die schweren Teilchen eine relativistische Wellengleichung vom Diracschen Typus annimmt, könnte man z. B. zu (12) Terme wie

$$gQ(\alpha_x A_1 + \alpha_y A_2 + \alpha_z A_3) + \text{komplex konjugiert} \quad (49)$$

addieren, wo $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die Diracschen Matrizen für das schwere Teilchen bedeuten und A_1, A_2, A_3 die Raumkomponenten des von (11) definierten Vierervektors sind. Das Glied (49) würde zu (12) in demselben Verhältnis stehen wie die Terme eV bzw. $e(\alpha, U)$ ($V =$ skalares Potential; $U =$ Vektorpotential) zu der Diracschen Hamilton-Funktion.

Ein Wechselwirkungsglied wie (49) würde natürlich auch verbotene Übergänge ermöglichen, mit einer relativen Intensität von der Größenordnung $(v/c)^2$ in bezug auf die der erlaubten Übergänge. Dies gibt also eine zweite Möglichkeit für das Vorhandensein von Übergängen, die etwa 100mal schwächer sind als die normalen.

10. Vergleich mit der Erfahrung.

Formel (45) gibt eine Beziehung zwischen dem maximalen Impuls der emittierten β -Strahlen und der Lebensdauer der β -strahlenden Substanz. In dieser Beziehung tritt zwar noch ein unbekanntes Element auf, nämlich das Integral

$$\int v_m^* u_n d\tau, \tag{50}$$

für dessen Auswertung eine Kenntnis der Eigenfunktionen des Protons und des Neutrons im Kern notwendig wäre. Im Falle der erlaubten Übergänge ist jedoch (50) von der Größenordnung 1. Man kann also erwarten, daß das Produkt

$$\tau F(\eta_0) \tag{51}$$

für alle erlaubten Übergänge dieselbe Größenordnung hat. Falls aber der betreffende Übergang verboten ist, ist die Lebensdauer rund 100mal größer als im normalen Falle und auch das Produkt (51) wird entsprechend größer.

In der Tabelle 2 sind die Produkte (51) für die radioaktiven Elemente zusammengestellt, für welche man genügende Daten über das kontinuierliche β -Spektrum hat.

Tabelle 2.

Element	τ (Stunden)	η_0	$F(\eta_0)$	$\tau F(\eta_0)$
U X ₂	0,026	5,4	115	3,0
Ra B	0,64	2,04	1,34	0,9
Th B	15,3	1,37	0,176	2,7
Th C''	0,076	4,4	44	3,3
Ac C''	0,115	3,6	17,6	2,0
Ra C	0,47	7,07	398	190
Ra E	173	3,23	10,5	1800
Th C	2,4	5,2	95	230
Ms Th ₂	8,8	6,13	73	640

Aus der Tabelle sind die zwei erwarteten Gruppen ohne weiteres erkennbar; eine solche Einteilung ist übrigens bereits von Sargent¹⁾ auf empirischem Wege festgestellt worden. Die Werte von η_0 sind aus der genannten Arbeit von Sargent genommen (zum Vergleich bemerke man, daß: $\eta_0 = (H\varrho)_{\max}/1700$). Die von Sargent als nicht zuverlässig angegebenen Werte von η_0 passen nicht besonders gut in die Einteilung; für UX₁ hat man $\tau = 830$; $\eta_0 = 0,76$; $F(\eta_0) = 0,0065$; $\tau F(\eta_0) = 5,4$; dies Element scheint also zur ersten Gruppe zu passen. Für AcB hat man

¹⁾ B. W. Sargent, Proc. Roy. Soc. London (A) **139**, 659, 1933.

die folgenden Daten: $\tau = 0,87$; $\eta_0 = 1,24$; $F(\eta_0) = 0,102$; $\tau F(\eta_0) = 0,09$, also ein τF -Wert etwa zehnmal kleiner als die der ersten Gruppe. Für RaD hat man $\tau = 320000$; $\eta_0 = 0,38$ (sehr unsicher); $F(\eta_0) = 0,00011$; $\tau F(\eta_0) = 35$. RaD liegt also ungefähr in der Mitte zwischen den beiden Gruppen. Ich habe keine Daten über die anderen β -strahlenden Elemente MsTh₁, U Y, Ac, AcC, UZ, RaC'' gefunden.

Aus den Daten der Tabelle 2 kann man eine, wenn auch sehr grobe, Abschätzung der Konstante g gewinnen. Nimmt man etwa an, daß in den Fällen wo (50) gleich Eins wird, man $\tau F(\eta_0) = 1$ hat (d. h., in Sekunden, = 3600), so bekommt man aus (45):

$$g = 4 \cdot 10^{-50} \text{cm}^3 \cdot \text{erg}.$$

Dieser Wert gibt natürlich nur die Größenordnung von g .

Zusammenfassend kann man sagen, daß dieser Vergleich von Theorie und Erfahrung eine so gute Übereinstimmung gibt, wie man nur erwarten

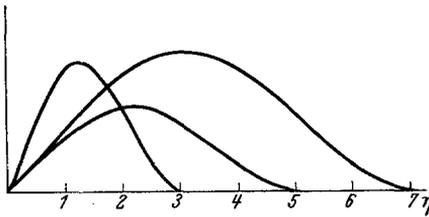


Fig. 2.

konnte. Die bei den als experimentell unsicheren Elementen RaD und AcB festgestellten Abweichungen können wohl teilweise durch Ungenauigkeit der Messungen erklärt werden, teilweise auch durch etwas abnorm große aber gar nicht unplausible

Schwankungen des Matrixelements (50). Man hat weiter zu bemerken, daß man aus der den β -Zerfall begleitenden γ -Strahlung schließen kann, daß die meisten β -Zerfälle zu verschiedenen Endzuständen des Protons führen können, wodurch wieder Schwankungen in dem $\tau F(\eta_0)$ -Wert erklärt werden können.

Wir wenden uns jetzt zur Frage nach der Form der Geschwindigkeitsverteilungskurve der emittierten β -Strahlen. Für den Fall der erlaubten Übergänge ist die Verteilungskurve als Funktion von η (d. h. bis auf den Faktor 1700, von $H\varrho$) durch (44) gegeben. Verteilungskurven für verschiedene Werte von η_0 sind in der Fig. 2 zusammengestellt, wobei für die Bequemlichkeit der Zeichnung die Ordinateneinheit in den verschiedenen Fällen passend gewählt worden ist. Diese Kurven zeigen eine befriedigende Ähnlichkeit etwa zu den von Sargent¹⁾ zusammengestellten Verteilungskurven. Nur in dem Teil der Kurve kleiner Energie liegen die Kurven von Sargent etwas tiefer als die theoretischen. Dies ist deutlicher in der

¹⁾ B. W. Sargent, Proc. Cambridge Phil. Soc. **28**, 538, 1932.

Fig. 3 zu sehen, wo als Abszisse die Energie an Stelle des Impulses genommen worden ist. Hierzu muß man jedoch bemerken, daß die experimentelle Kenntnis des Verteilungsgesetzes für kleine Energien besonders unsicher ist¹⁾. Übrigens hat man für die verbotenen Übergänge auch theoretisch Kurven zu erwarten, die im Gebiet kleiner Energie tiefer liegen als die der Fig. 2 und 3. Dieser letzte Punkt ist

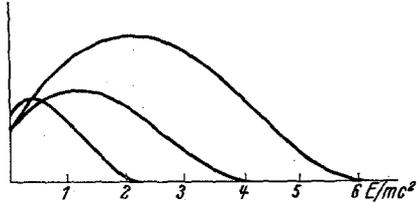


Fig. 3.

besonders für den Fall der experimentell verhältnismäßig gut bekannten Kurve des RaE zu beachten. Aus der Tabelle 2 sieht man nämlich, daß RaE einen sehr großen $\tau F(\eta_0)$ -Wert hat; der β -Zerfall des RaE ist also gewiß verboten und wird sogar möglicherweise nur erst in zweiter Näherung erlaubt. Ich hoffe in einer nächsten Mitteilung etwas Genaueres über den Verlauf der Energieverteilungskurven für die verbotenen Übergänge sagen zu können.

Zusammenfassend darf man wohl sagen, daß die Theorie in der hier angegebenen Form in Übereinstimmung mit den allerdings nicht immer besonders genauen experimentellen Daten ist. Sollte man übrigens auch bei einem näheren Vergleich von Theorie und Erfahrung zu Widersprüchen kommen, so wäre es noch möglich, die Theorie abzuändern, ohne ihre begrifflichen Fundamente zu berühren. Man könnte nämlich Gleichung (9) behalten und eine verschiedene Wahl der $c_{s,\sigma}$ treffen. Dies könnte insbesondere zu einer Abänderung der Auswahlregel (48) führen und eine andere Form der Energieverteilungskurve sowie der Abhängigkeit der Lebensdauer von der maximalen Energie ergeben. Ob eine solche Änderung notwendig sein wird, kann jedoch erst durch eine weitere Entwicklung der Theorie und möglicherweise auch durch eine Verschärfung der experimentellen Daten gezeigt werden.

¹⁾ Vgl. z. B. E. Rutherford, B. Ellis u. J. Chadwick, Radiations from Radioactive Substances, Cambridge 1932. Siehe insbesondere S. 407.